

Eveiller la curiosité de l'étudiant pour la statistique
bayésienne *via* un problème décisionnel fondé sur une
tragédie réelle
L'avalanche de **Montroc**

Jean-Jacques Boreux, Eric Parent, Jacques Bernier

CFIES 10 septembre 2010

- 1 L'avalanche de Montroc
 - 1 Les faits
 - 2 Un contexte décisionnel fictif
- 2 Une aide à la décision fondée sur un modèle bayésien
 - 1 La règle de décision
 - 2 Le paradigme bayésien
 - 3 Le modèle bêta-binomial
- 3 Résultats et conclusion

L'avalanche de Montroc

Les faits

- Le 9 février 1999, une avalanche dévaste le hameau de Montroc dans la vallée de Chamonix.
 - 12 morts, 15 chalets détruits, 5 chalets endommagés.



- 1 D'après la cartographie des risques de l'époque, les chalets étaient en zone blanche, sans risque d'avalanche, ou en zone bleue, risque modéré.
- 2 Le comité consultatif créé par le maire en 1995 était composé de techniciens et de personnes qualifiées.
- 3 Le maire de Chamonix a délivré les permis de construire en toute légalité.
 - Le maire a été condamné à 3 mois de prison, avec sursis, le 17 juillet 2003.

Un contexte décisionnel fictif

- Nous sommes en 1995 et **VOUS** êtes le Conseiller en prévention des risques de la mairie de Chamonix.
- Le maire vous demande de l'aider à prendre la bonne décision :
 - ① refuser de déclarer le site constructible;
 - ② accepter son lotissement.
- Vous subissez des pressions, car la neige est *l'or blanc* des Alpes.
 - Propriétaires des terrains.
 - Commerçants.
 - Sociétés qui gèrent les remontées mécaniques.
 - La municipalité perçoit taxes et impôts.
- La seconde décision à la cote ! **VOTRE** responsabilité est engagée.

Ce que vous savez

- 1 Le site de Montroc est en zone blanche (risque nul) ou en zone bleue (risque modéré).
- 2 À Montroc, la dernière avalanche a été observée en 1945.
- 3 Montroc aurait subi quatre autres avalanches :
 - 1 l'avalanche de 1843 citée dans un document établi en 1943:
 - 2 l'avalanche de 1908 dans les fiches des eaux et forêts:
 - 3 les deux autres avalanches reconnues ne sont pas datées.



Formalisation du problème décisionnel

- Nous sommes en 1995. Le maire de Chamonix a le choix entre deux décisions :
 - ① déclarer Montroc constructible et perdre C_1 M € si le site est rasé par une avalanche sur la période $1995 + h$ (horizon de prévision);
 - ② refuser le projet et perdre C_2 M € si le site ne subit aucune avalanche sur cette même période (les non-recettes).
- Soit N le nombre d'années *noires* dans les h prochaines années.

Table des coûts	$N = 0$	$N \geq 1$
Décision \ Proba	$1 - p(h)$	$p(h)$
d_1	0	C_1
d_2	C_2	0

- Une règle de décision cohérente consiste à recommander la décision qui minimise la valeur attendue de la perte totale. Le risque r en découle :

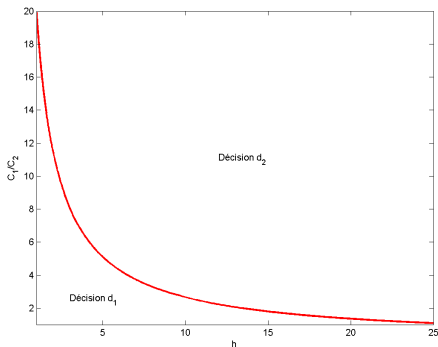
$$r = \frac{p(h)}{1 - p(h)} \times \frac{C_1}{C_2}$$

La quantification du risque...

...vous permet de recommander une décision

- Nul besoin d'évaluer les coûts avec précision, leur rapport suffit.
- Disposant d'un modèle pour calculer $p(h)$, calculer le risque r pour divers horizons de prévision et divers rapports de coûts

$$r < 1 \Rightarrow d_1 \text{ (autoriser), } r \geq 1 \Rightarrow d_2 \text{ (refuser)}$$



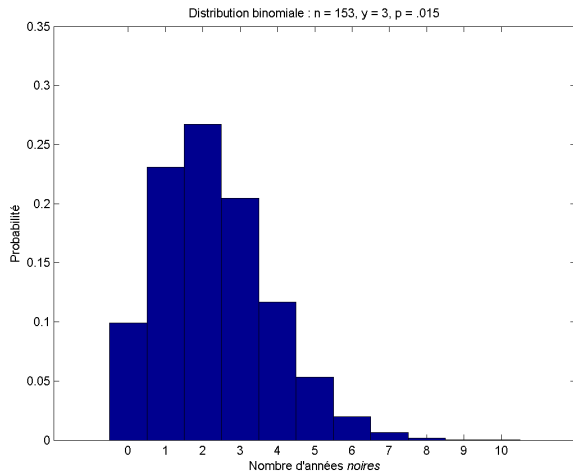
Construction du modèle

Imaginer un mécanisme de tirage au sort capable de simuler les observations

- 1 Les années sont codées 1 ou 0 selon que l'événement "avalanche" se réalise au moins une fois (année *noire*) ou ne se réalise pas.
 - L'objet mathématique associé est une variable aléatoire (v. a.) de *Bernoulli* de probabilité π .
- 2 La suite des n années constitue un *processus de Bernoulli* d'ordre n et de probabilité π ssi les n v. a. de *Bernoulli* sont *indépendantes* et *identiquement distribuées*.
 - Il faut discuter l'hypothèse *iid*.
- 3 La somme d'un *processus de Bernoulli* d'ordre n et de probabilité π est distribuée selon une *loi binomiale* d'ordre n et de probabilité π .

Description probabiliste de l'observable

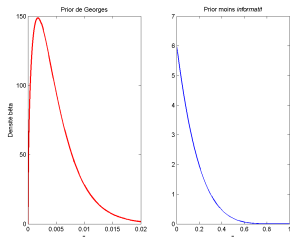
Les données objectives



Description probabiliste du paramètre

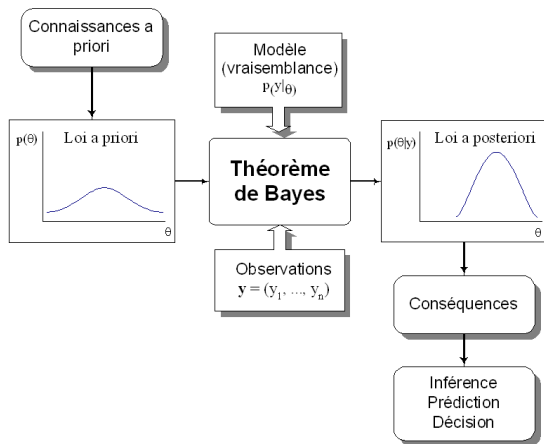
Le savoir d'un expert sur le problème en main

- Georges, guide de haute montagne, connaît fort bien le site de Montroc.
 - Georges dit : *"pour moi, il y a au plus une chance sur cent qu'une année choisie au hasard soit une année noire et si je me trompe, c'est d'un Chaouiïa"*.
- Georges ne le sait pas, mais il a fournit une information permettant de caler une distribution de probabilité sur π , (une densité *bêta*) qui représente **SON** savoir actuel.



Le paradigme bayésien

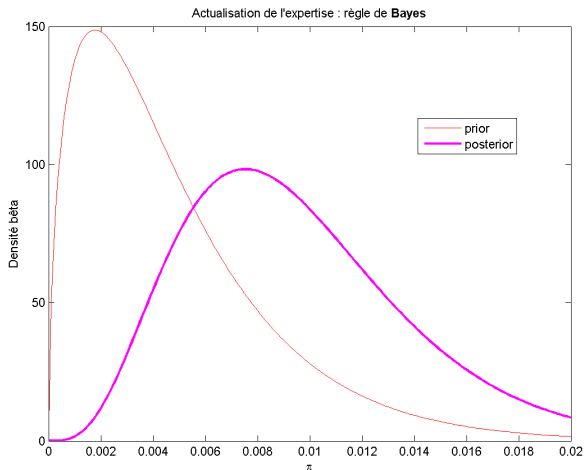
Il faut mobiliser TOUTE l'information disponible



Le modèle bêta-binomial

La loi bêta se "marie" bien avec la loi binomiale

- La **règle de Bayes** actualise l'expertise de Georges avec les données.
- La densité *a posteriori* de π est encore une loi bêta :

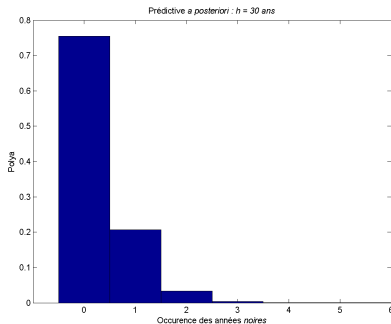


Distribution prédictive a posteriori

Distribution du nombre d'années noires dans les h prochaines années

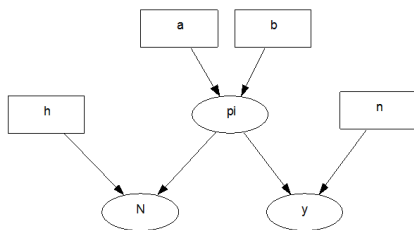
$$[N|Y = y, h] = \int_0^1 [N, \pi|Y = y, h] d\pi = \int_0^1 \underbrace{[N|\pi, h]}_{\text{Vraisemblance}} \underbrace{[\pi|Y = y]}_{\text{posterior}} d\pi$$

- Le résultat est la **distribution de Polya** :



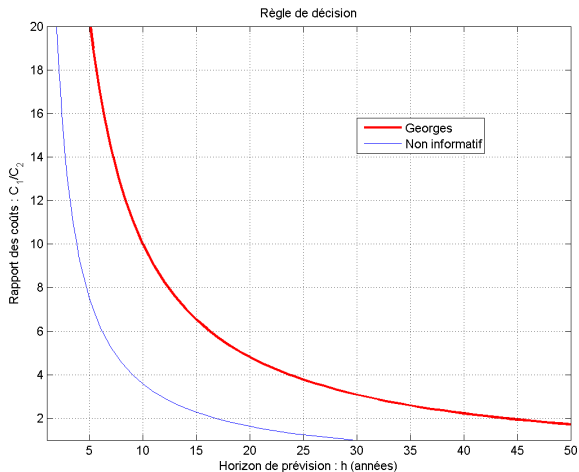
Représentation du modèle bêta-binomial par un réseau bayésien

WinBUGS



L'aide à la décision

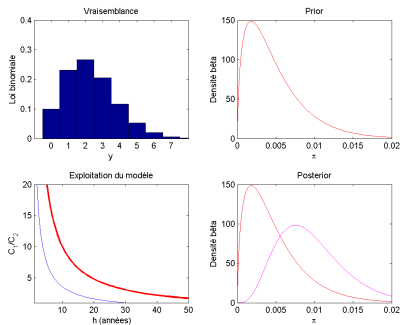
Le Maire de Chamonix décide



1 Une règle de décision

$$r = \frac{p(h)}{1 - p(h)} \times \frac{C_1}{C_2}$$

2 Un modèle *bayésien*



Quelques références

Notre dernier livre et beaucoup d'autres livres et articles

- Boreux, J.-J., Parent, E., Bernier, J. (2010). *Pratique du calcul bayésien*. Paris, France: Springer-Verlag.
- Bernier, J., Parent, E., Boreux, J.-J. (2000). *Statistique pour l'environnement. Traitement bayésien de l'incertitude*. Paris, France: Editions Tec & Doc.
- Spiegelhalter, D.J., Thomas, A., Best, N.G. (2000). *WinBUGS Version 1.3 : User Manual*. Cambridge : Medical Research Council Biostatistics Unit.
- R Development Core Team. (2009). *R : A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.