

MoyenneS ou moyenne ?

Chr. Vandeschrick

ISFSC (HE « Groupe ICHEC - ISC Saint-Louis – ISFSC) Bruxelles

ISFSC
INSTITUT SUPÉRIEUR
DE FORMATION SOCIALE
ET DE COMMUNICATION

DEMO (Université catholique de Louvain)



Moyenne et pédagogie : constats (4)

- Énumération accumulative de formules
- Règles d'utilisation vagues/inopérantes (si présentes)
- Confusion entre mode de calcul et définition

Bref, l'apprenant est souvent bien démuni

- s'il doit calculer une moyenne
- dans une situation sortant un peu de l'ordinaire
- en dehors de la salle de cours



Objectifs de la communication

- Proposer une méthode
 - pour déterminer dans n'importe quel cas concret
 - la formule à employer pour obtenir une moyenne
 - faisant sens par rapport aux observations
- Proposer une méthode SANS RECOURS à des maths de haut vol
- Grâce à cette méthode :
 - la logique entre les différentes formules
 - choix aisé de la bonne formule
 - définition et mode de calcul bien distingués
 - bref, l'hésitant n'a plus à... hésiter
- Conséquences collatérales pour la variance



Méthode : principes généraux

- Tout repose sur une définition unique de la moyenne
- Par application de cette définition
 - à différents cas concrets
 - les différentes formules vont apparaitre
- Remarques :
 - la formule recherchée doit être **fonction des x_i et de n** , même s'il existe un raccourci pour le calcul !
 - dans littérature, parfois
 - définition proche, mais pas de systématisation (ou si peu)
 - démarche proche, mais formalisme math. décourageant (cf. ANTOINE Ch., notamment).



Méthode : 1^{er} cas (1)

■ Un 1^{er} exemple : taux de change

- pour un opérateur
- et trois opérations de change

■ Données : les 3 opérations de change : ($\text{€} \Rightarrow \text{\$}$)

- 01/01/2008 : 500 € au taux de 1,5 $\text{\$/€}$
- 01/07/2008 : 250 € au taux de 1,4 $\text{\$/€}$
- 01/01/2009 : 750 € au taux de 1,3 $\text{\$/€}$

Tableau des données

p	x_p ($\text{\$/€}$)	n_p (€)
1	1,5	500
2	1,4	250
3	1,3	750

■ La question : le taux moyen pour les 1.500 € échangés ?



Méthode : 1^{er} cas (2)

■ Le taux de change moyen pour les 1.500 € échangés?

■ D'abord apprivoiser les données (1^{er} change : 500 € à 1,5 $\text{\$/€}$, soit 750 \$)

- en agissant **sur les 500 €**, le **taux de change** produit **750 \$**
- en agissant **sur les €**, le **taux de change** produit **des \$**
- en agissant **sur les « i »**, la **variable** produit **son effet**
- donc, ici :
 - la **variable** = le **taux de change**
 - les **« i »** = les **€** (« i » = individus sous observation)
 - l'**EFFET** de la variable sur les « i » = les **\$** obtenus (par le change des €)

□ les unités « physiques » : $\text{€} * \text{\$/€} = \text{\$}$ (en agissant sur les €, le taux produit des \$)

□ lecture des données (1^{er} change) :

- 500 € sont observés à raison de 1,5 $\text{\$/€}$
- pour 500 « i », la valeur de la variable vaut 1,5 ($\text{\$/€}$)
- en agissant sur les 500 €, le taux produit un effet de 750 \$ ($500 * 1,5$)



Méthode : 1^{er} cas (3)

■ Calcul de l'effet à propos du taux de change

□ rappel des données

p	x _p (\$/€)	n _p (€)
1	1,5	500
2	1,4	250
3	1,3	750

□ effet par valeur du taux de change :

- 500 € au taux de 1,5 \$/€ : $500 * 1,5 = n_1 * x_1 = 750 \$$
- 200 € au taux de 1,4 \$/€ : $200 * 1,4 = n_2 * x_2 = 280 \$$
- 750 € au taux de 1,3 \$/€ : $750 * 1,3 = n_3 * x_3 = 975 \$$

□ « effet global » (de la var. sur l'ensemble des « i ») :

- $EG = (500 * 1,5) + (200 * 1,4) + (750 * 1,3)$ avec « EG » = « Effet Global »

- $EG = (n_1 * x_1) + (n_2 * x_2) + (n_3 * x_3)$

- $EG = \sum_{p=1}^P (n_p * x_p)$, avec P = 3.



Méthode : définition

■ Définition : la moyenne =

- la valeur de la variable qui,
- affectant l'ensemble des « i »,
- conserve l'effet global (de la variable sur l'ensemble des « i »).

■ Unités de la moyenne = unités de la variable

■ Appliquons la définition au calcul du taux moyen



Méthode : 1^e cas (4)

■ Application de la définition à l'exemple

□ Remplacer

- dans la formule de l'effet global (EG),
- les **valeurs observées** (x_p) par la **moyenne**
- tout en conservant la valeur de EG

$$\square EG = \sum_{p=1}^P (n_p * x_p) = \sum_{p=1}^P (n_p * \bar{x})$$

$$\square EG = \sum_{p=1}^P (n_p * x_p) = \sum_{p=1}^P (n_p * \bar{x}) = \bar{x} * \sum_{p=1}^P (n_p) = \bar{x} * n$$

$$\square \sum_{p=1}^P (n_p * x_p) = \bar{x} * n \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum_{p=1}^P (n_p * x_p)}{n}$$

- soit la formule ARITHMÉTIQUE « pondérée » par les effectifs



Méthode : résumé après le 1^{er} cas

■ D'abord identifier :

- **la variable** (caractéristique dont on recherche la moyenne)
- **les unités physiques de la variable** (souvent un rapport ; \$/€)
- **les « i »** (individus sous observation)
 - les personnes ou les choses pour lesquelles on connaît la variable
 - généralement présents dans les unités physiques de la variable
- **l'effet partiel** de la variable sur les « i »
- **l'effet global** (combinaison des effets partiels)

■ Remplacer les x_p par la moyenne dans la formule de l'EG

■ Résoudre l'équation pour isoler la moyenne



Méthode : 2^e cas (1)

■ Un 2^e exemple : taux de change

- pour un 2^e opérateur
- et 3 opérations de change

■ Données : les 3 opérations de change : \$ ⇒ € (et plus € ⇒ \$)

- 01/01/2008 : 800 \$ au taux de 1,5 \$/€
- 01/07/2008 : 350 \$ au taux de 1,4 \$/€
- 01/01/2009 : 650 \$ au taux de 1,3 \$/€

Tableau des données

p	x _p (\$/€)	n _p (\$)
1	1,5	800
2	1,4	350
3	1,3	650

■ Le taux de change moyen pour les 1.800 \$ échangés ?



Méthode : 2^e cas (2)

■ Le taux de change moyen pour les 1.800 \$ échangés ?

■ Démarche :

- Variable : taux de change, exprimé en \$/€ (ne pas l'inverser)
- Individus sous observation les \$ (c'est pour des \$ que la var. est connue)
- Effet partiel : en agissant sur les \$, le taux produit des € : \$ * $\frac{1}{\left(\frac{\$}{\text{€}}\right)} = \text{€}$

□ Effet global : la somme des € reçus : $EG = \sum_{p=1}^P \left(n_p * \frac{1}{x_p} \right)$

□ Application de la définition : $\sum_{p=1}^P \left(n_p * \frac{1}{x_p} \right) = \sum_{p=1}^P \left(n_p * \frac{1}{\bar{x}} \right)$

□ Résolution de l'équation : $\bar{x} = \frac{n}{\sum_{p=1}^P \left(\frac{n_p}{x_p} \right)}$

- Formule harmonique pondérée



Méthode : 3^e cas (1)

■ Un 4^e exemple : descendance moyenne

■ Données : 5 femmes interrogées à propos de leur descendance

- femme A : 3 enfants
- femme B : 6 enfants
- femme C : 0 enfant
- femme D : 1 enfant
- femme E : 2 enfants

Tableau des données

Femme (i)	Descendance (x _i)
A	3
B	6
C	0
D	1
E	2

■ Quelle est la descendance moyenne parmi ces 5 femmes ?



Méthode : 3^e cas (2)

■ La descendance moyenne parmi les 5 femmes ?

■ Identification

- Variable : descendance, exprimé en enfants/femme (e/f)
- Individus sous observation les femmes
- Ef. partiel : en agissant sur les fe., la variable produit des efts : $f^*(e/f) = e$

- Effet global : le total des enfants : $EG = \sum_{i=1}^n (1 * x_i)$

- Application de la définition : $\sum_{i=1}^n (x_i) = \sum_{i=1}^n (\bar{x})$

- Résolution de l'équation :
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)}{n}$$

- Formule arithmétique dite « non pondérée », même si en fait...



Méthode : 4^e cas (1)

- Un 4^e exemple : le coefficient multiplicateur annuel (CM)
- Présentation allégée
- Données :
 - Une population observée durant 4 ans
 - Décompte de la population au 1^{er} janvier de chaque année

Tableau des données

Date	Population	Année (i)	Coefficient (x _i)
1/1/1991	1.000	1991	1,10 (1.100/1.000)
1/1/1992	1.100	1992	1,20 (1.320/1.100)
1/1/1993	1.320	1993	1,05 (1.386/1.320)
1/1/1994	1.386	-	

Méthode : 4^e cas (2)

- Un 4^e exemple : le coefficient multiplicateur annuel moyen

- Données :

Date	Population	Année (i)	Coefficient (x _i)
1/1/1991	1.000	1991	1,10 (1.100/1.000)
1/1/1992	1.100	1992	1,20 (1.320/1.100)
1/1/1993	1.320	1993	1,05 (1.386/1.320)
1/1/1994	1.386	-	

- Identification :

- variable : coefficient multiplicateur annuel (CM)
- individus sous observation : les années
- on connaît la valeur de la variable pour les années
- effet global :
 - $pop_{1/1/91} * CM_{91} * CM_{92} * CM_{93} = pop_{1/1/94}$
 - $EG = x_{91} * x_{92} * x_{93} = (pop_{1/1/94} / pop_{1/1/91})$

Méthode : 4^e cas (3)

■ Application de la définition au 4^e exemple

- remplacer les x_i par la moyenne & conserver l'EG
- $x_{91} * x_{92} * x_{93} = \bar{x} * \bar{x} * \bar{x} = (\bar{x})^3 \Rightarrow \bar{x} = \sqrt[3]{x_{91} * x_{92} * x_{93}}$

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$$

- soit la formule GÉOMÉTRIQUE « non pondérée »

□ Remarque :

- vu que $x_{91} * x_{92} * x_{93} = \frac{\text{pop}_{1/1/94}}{\text{pop}_{1/1/91}} \Rightarrow \bar{x} = \sqrt[3]{\frac{\text{pop}_{1/1/94}}{\text{pop}_{1/1/91}}}$
- qui n'est pas une formule avec les x_i !
- pas intéressante du point de vue théorique, même si très pratique !



Règle : arithmétique ou harmonique ? dans la littérature

■ Exemple tiré de PY (2007), p. 108 :

- Règle :
 - Quand le Φ étudié varie comme la variable, arithmétique.
 - Quand il varie comme l'inverse de la variable, harmonique.
- Exemple 1 (tiré de PY) :
 - un aller fait à du 60 km/h et le retour à du 30 km/h. : vitesse moyenne ?
- Exemple 2 :
 - 40 km à du 80 km/h. et 12 km à du 24 km/h. : vitesse moyenne ?
- Solutions selon la « règle » de PY, et commentaires

	Ex. 1 (PY)	Ex. 2
Φ étudié	Vitesse	Vitesse
Variable	Temps	Distance
Formule	Harmo.	Arith.
Calcul	$\frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{30}} = 40$	$\frac{(40 * 80) + (12 * 24)}{40 + 12} = 67,08$
Commentaires	RAS.	$\frac{40 + 12}{\frac{40}{80} + \frac{12}{24}} = \frac{52}{0,5 + 0,5} = 52$

Ex. 2 montre l'inefficacité de la règle de PY



Règle : rapports et moyenne géométrique dans la littérature

- Exemple tiré de SPIEGEL (1984), p. 60
- La règle « en cas de rapports, formule géométrique »
- Possible de démontrer « l'erreur » de SPIEGEL
- Et pourtant, on retrouve souvent cette « règle »
- Comme d'autres, cette « règle » entraîne des résultats faux !
 - Toute vitesse moyenne est moyenne harmonique des vitesses (Antoine 1998, p. 109)
 - La règle de PY (cf. *supra*)
- Remplaçons donc ces règles illusoirs par une MÉTHODE !

Variance : constats initiaux (1)

- Pourquoi élever l'écart à la moyenne au carré ?

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0 \quad , \text{ expression toujours nulle } \Rightarrow \text{ élévation au carré !}$$

- Formule « simplifiée »

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2)}{n} - (\bar{x})^2$$

Ceci est vrai uniquement si moyenne calculée selon la formule arithmétique

Conclusions générales

- Une seule définition de la moyenne
- Nombreuses formules possibles pour le calcul
- Pour identifier la bonne formule : une méthode
- Plus besoin de règles
- Définition \neq mode de calcul/formule
 - Définition : objectif à atteindre
 - Mode de calcul/formule : recette pour atteindre cet objectif
- Toutes les formules sont pondérées, comme le montre le calcul de EG
- Effets collatéraux sur la variance

En définitive, moyenneS ou moyenne ?

Une moyenne et des formuleS !

Merci !