MoyenneS ou moyenne ?

Chr. Vandeschrick

ISFSC (HE « Groupe ICHEC - ISC Saint-Louis – ISFSC) Bruxelles

DEMO (Université catholique de Louvain)

Moyenne et pédagogie : constats (4)

- **Énumération accumulative de formules**
- **Règles d'utilisation vagues/inopérantes (si présentes)**
- **Confusion entre mode de calcul et définition**

Bref, l'apprenant est souvent bien démuni

- s'il doit calculer une moyenne

- dans une situation sortant un peu de l'ordinaire

- en dehors de la salle de cours

Objectifs de la communication

- **Proposer une méthode**
  - **pour déterminer dans n'importe quel cas concret**
  - **la formule à employer pour obtenir une moyenne**
  - **faisant sens par rapport aux observations**
- **Proposer une méthode SANS RECOURS à des maths de haut vol**
- **Grâce à cette méthode :**
  - **la logique entre les différentes formules**
  - **choix aisé de la bonne formule**
  - **définition et mode de calcul bien distingués**
  - **bref, l'hésitant n'a plus à… hésiter**
- **Conséquences collatérales pour la variance**

Méthode : principes généraux

- **Tout repose sur une définition unique de la moyenne**
- **Par application de cette définition**
  - **à différents cas concrets**
  - **les différentes formules vont apparaitre**
- **Remarques :**
  - **la formule recherchée doit être fonction des x_i et de n, même s'il existe un raccourci pour le calcul !**
  - **dans littérature, parfois**
    - **définition proche, mais pas de systématisation (ou si peu)**
    - **démarche proche, mais formalisme math. décourageant (*cf.* ANTOINE Ch., notamment).**

Méthode : 1er cas (1)

- **Un 1er exemple : taux de change**
  - pour un opérateur
  - et trois opérations de change
- **Données : les 3 opérations de change : (€ ⇒ $)**
  - 01/01/2008 : 500 € au taux de 1,5 $/€
  - 01/07/2008 : 250 € au taux de 1,4 $/€
  - 01/01/2009 : 750 € au taux de 1,3 $/€

Tableau des données

p	x_p ($/€)	n_p (€)
1	1,5	500
2	1,4	250
3	1,3	750

- **La question : le taux moyen pour les 1.500 € échangés ?**

Méthode : 1er cas (2)

- **Le taux de change moyen pour les 1.500 € échangés?**
- **D'abord apprivoiser les données** (1er change : 500 € à 1,5 $/€, soit 750 $)
  - en agissant sur les 500 €, le taux de change produit 750 $
  - en agissant sur les €, le taux de change produit des $
  - en agissant sur les « i », la variable produit son effet
  - donc, ici :
    - la variable = le taux de change
    - les « i » = les € (« i » = individus sous observation)
    - l'EFFET de la variable sur les « i » = les $ obtenus (par le change des €)
  - les unités « physiques » : € * $/€ = $ (en agissant sur les €, le taux produit des $)
  - lecture des données (1er change) :
    - 500 € sont observés à raison de 1,5 $/€
    - pour 500 « i », la valeur de la variable vaut 1,5 ($/€)
    - en agissant sur les 500 €, le taux produit un effet de 750 $ (500*1,5)

Méthode : 1er cas (3)

- Calcul de l'effet à propos du taux de change
  - rappel des données

p	x_p (\$/€)	n_p (€)
1	1,5	500
2	1,4	250
3	1,3	750

  - effet par valeur du taux de change :
    - 500 € au taux de 1,5 \$/€ : 500 * 1,5 = $n_1 * x_1$ = 750 \$
    - 200 € au taux de 1,4 \$/€ : 200 * 1,4 = $n_2 * x_2$ = 280 \$
    - 750 € au taux de 1,3 \$/€ : 750 * 1,3 = $n_3 * x_3$ = 975 \$
  - « effet global » (de la var. sur l'ensemble des « i ») :
    - EG = (500 * 1,5) + (200 * 1,4) + (750 * 1,3) avec « EG » = « Effet Global »
    - EG = $(n_1 * x_1) + (n_2 * x_2) + (n_3 * x_3)$
    - $EG = \sum_{p=1}^{P} (n_p * x_p)$, avec P = 3.

Méthode : définition

- Définition : la moyenne =
  - la valeur de la variable qui,
  - affectant l'ensemble des « i »,
  - conserve l'effet global (de la variable sur l'ensemble des « i »).
- Unités de la moyenne = unités de la variable
- Appliquons la définition au calcul du taux moyen

Méthode : 1e cas (4)

- **Application de la définition à l'exemple**
  - Remplacer
    - dans la formule de l'effet global (EG),
    - les valeurs observées (x_p) par la moyenne
    - tout en conservant la valeur de EG
  - $EG = \sum_{p=1}^{P}(n_p * \boxed{x_p}) = \sum_{p=1}^{P}(n_p * \boxed{\bar{x}})$
  - $EG = \sum_{p=1}^{P}(n_p * x_p) = \sum_{p=1}^{P}(n_p * \bar{x}) = \bar{x} * \sum_{p=1}^{P}(n_p) = \bar{x} * n$
  - $\sum_{p=1}^{P}(n_p * x_p) = \bar{x} * n \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{p=1}^{P}(n_p * x_p)}{n}}$
  - soit la formule ARITHMÉTIQUE « pondérée » par les effectifs

Méthode : résumé après le 1er cas

- **D'abord identifier :**
  - **la variable** (caractéristique dont on recherche la moyenne)
  - **les unités physiques de la variable** (souvent un rapport ; $/€)
  - **les « i »** (individus sous observation)
    - les personnes ou les choses pour lesquelles on connait la variable
    - généralement présents dans les unités physiques de la variable
  - **l'effet partiel** de la variable sur les « i »
  - **l'effet global** (combinaison des effets partiels)
- **Remplacer les x_p par la moyenne dans la formule de l'EG**
- **Résoudre l'équation pour isoler la moyenne**

Méthode : 2e cas (1)

- **Un 2e exemple : taux de change**
  - **pour un 2e opérateur**
  - **et 3 opérations de change**
- **Données : les 3 opérations de change : $ $\Rightarrow$ € (et plus € $\Rightarrow$ $)**
  - **01/01/2008 : 800 $ au taux de 1,5 $/€**
  - **01/07/2008 : 350 $ au taux de 1,4 $/€**
  - **01/01/2009 : 650 $ au taux de 1,3 $/€**

Tableau des données

p	x_p ($/€)	n_p ($)
1	1,5	800
2	1,4	350
3	1,3	650

- **Le taux de change moyen pour les 1.800 $ échangés ?**

Méthode : 2e cas (2)

- **Le taux de change moyen pour les 1.800 $ échangés ?**
- **Démarche :**
  - **Variable : taux de change, exprimé en $/€** (ne pas l'inverser)
  - **Individus sous observation les $** (c'est pour des $ que la var. est connue)
  - **Effet partiel : en agissant sur les $, le taux produit des € :** $\$ * \frac{1}{\left(\frac{\$}{€}\right)} = €$
  - **Effet global : la somme des € reçus :** $EG = \sum_{p=1}^{P} \left(n_p * \frac{1}{x_p} \right)$
  - **Application de la définition :** $\sum_{p=1}^{P} \left(n_p * \boxed{\frac{1}{x_p}} \right) = \sum_{p=1}^{P} \left(n_p * \boxed{\frac{1}{\bar{x}}} \right)$
  - **Résolution de l'équation :** $\bar{x} = \frac{n}{\sum_{p=1}^{P} \left(\frac{n_p}{x_p} \right)}$
  - **Formule harmonique pondérée**

Méthode : 3e cas (1)

- **Un 4e exemple : descendance moyenne**
- **Données : 5 femmes interrogées à propos de leur descendance**
  - **femme A : 3 enfants**
  - **femme B : 6 enfants**
  - **femme C : 0 enfant**
  - **femme D : 1 enfant**
  - **femme E : 2 enfants**

Tableau des données

Femme (i)	Descendance (x_i)
A	3
B	6
C	0
D	1
E	2

- **Quelle est la descendance moyenne parmi ces 5 femmes ?**

Méthode : 3e cas (2)

- **La descendance moyenne parmi les 5 femmes ?**
- **Identification**
  - **Variable : descendance, exprimé en enfants/femme (e/f)**
  - **Individus sous observation les femmes**
  - **Ef. partiel : en agissant sur les fe., la variable produit des efts : f *(e/f) = e**
  - **Effet global : le total des enfants :** $EG = \sum_{i=1}^{n}(1 * x_i)$
  - **Application de la définition :** $\sum_{i=1}^{n}(\boxed{x_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\boxed{\bar{x}})$
  - **Résolution de l'équation :** $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}$
  - **Formule arithmétique dite « non pondérée », même si en fait…**

Méthode : 4e cas (1)

- Un 4e exemple : le coefficient multiplicateur annuel (CM)
- Présentation allégée
- Données :
  - Une population observée durant 4 ans
  - Décompte de la population au 1er janvier de chaque année

Tableau des données

Date	Population		Année (i)	Coefficient (x_i)
1/1/1991	1.000		1991	1,10 (1.100/1.000)
1/1/1992	1.100		1992	1,20 (1.320/1.100)
1/1/1993	1.320		1993	1,05 (1.386/1.320)
1/1/1994	1.386		-	

Méthode : 4e cas (2)

- Un 4e exemple : le coefficient multiplicateur annuel moyen
- Données :

Date	Population		Année (i)	Coefficient (x_i)
1/1/1991	1.000		1991	1,10 (1.100/1.000)
1/1/1992	1.100		1992	1,20 (1.320/1.100)
1/1/1993	1.320		1993	1,05 (1.386/1.320)
1/1/1994	1.386		-	

- Identification :
  - variable : coefficient multiplicateur annuel (CM)
  - individus sous observation : les années
  - on connait la valeur de la variable pour les années
  - effet global :
    - $pop_{1/1/91} * CM_{91} * CM_{92} * CM_{93} = pop_{1/1/94}$
    - $EG = x_{91} * x_{92} * x_{93} \quad = (pop_{1/1/94} / pop_{1/1/91})$

Méthode : 4e cas (3)

- Application de la définition au 4e exemple
  - remplacer les x_i par la moyenne & conserver l'EG
  - $x_{91} * x_{92} * x_{93} = \bar{x} * \bar{x} * \bar{x} = (\bar{x})^3 \Rightarrow \bar{x} = \sqrt[3]{x_{91} * x_{92} * x_{93}}$
  - $\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$
  - soit la formule GÉOMÉTRIQUE « non pondérée »
  - Remarque :
    - vu que $x_{91} * x_{92} * x_{93} = \frac{pop_{1/1/94}}{pop_{1/1/91}} \Rightarrow \bar{x} = \sqrt[3]{\frac{pop_{1/1/94}}{pop_{1/1/91}}}$
    - qui n'est pas une formule avec les x_i !
    - pas intéressante du point de vue théorique, même si très pratique !

Règle : arithmétique ou harmonique ? dans la littérature

- Exemple tiré de PY (2007), p. 108 :
  - Règle :
    - Quand le Φ étudié varie comme la variable, arithmétique.
    - Quand il varie comme l'inverse de la variable, harmonique.
  - Exemple 1 (tiré de PY) :
    - un aller fait à du 60 km/h et le retour à du 30 km/h. : vitesse moyenne ?
  - Exemple 2 :
    - 40 km à du 80 km/h. et 12 km à du 24 km/h. : vitesse moyenne ?
  - Solutions selon la « règle » de PY, et commentaires

	Ex. 1 (PY)	Ex. 2
Φ étudié	Vitesse	Vitesse
Variable	Temps	Distance
Formule	Harmo.	Arith.
Calcul	$\frac{2}{1/60 + 1/30} = 40$	$\frac{(40 * 80) + (12 * 24)}{40 + 12} = 67{,}08$
Commentaires	RAS.	$\frac{40 + 12}{40/80 + 12/24} = \frac{52}{0{,}5 + 0{,}5} = 52$

Ex. 2 montre l'inefficacité de la règle de PY

Règle : rapports et moyenne géométrique
dans la littérature

- Exemple tiré de SPIEGEL (1984), p. 60
- La règle « en cas de rapports, formule géométrique »
- Possible de démontrer « l'erreur » de SPIEGEL
- Et pourtant, on retrouve souvent cette « règle »
- Comme d'autres, cette « règle » entraine des résultats faux !
  - Toute vitesse moyenne est moyenne harmonique des vitesses (Antoine 1998, p. 109)
  - La règle de PY (*cf. supra*)
- Remplaçons donc ces règles illusoires par une MÉTHODE !

Variance : constats initiaux (1)

- Pourquoi élever l'écart à la moyenne au carré ?

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right) = 0$$, expression toujours nulle $\Rightarrow$ élévation au carré !

- Formule « simplifiée »

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2\right)}{n} - \left(\bar{x}\right)^2$$

Ceci est vrai uniquement si moyenne calculée selon la formule arithmétique

Conclusions générales

- Une seule définition de la moyenne
- Nombreuses formules possibles pour le calcul
- Pour identifier la bonne formule : une méthode
- Plus besoin de règles
- Définition ≠ mode de calcul/formule
  - Définition : objectif à atteindre
  - Mode de calcul/formule : recette pour atteindre cet objectif
- Toutes les formules sont pondérées, comme le montre le calcul de EG
- Effets collatéraux sur la variance

En définitive, moyenneS ou moyenne ?

Une moyenne et des formuleS !

Merci !